Lycées Tahar Sfar et Ibn Sina Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** Mathématiques	Classe : 4 ème Sc exp
Date : 14 / 05 / 2010	Profs : Mme Turki et Mrs Baccar, Hamza, Bousoffara et Meddeb	Durée : 3 heures

Exercice n°1 : (4.5 pts)

Cet exercice comporte trois questions indépendantes.

Une question comporte 3 affirmations repérées par les lettres: a, b et c. on indiquera pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est compté 0 point. Si le total est négatif, alors la note sera ramenée à zéro.

1) Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer au hasard une boule. On effectue n tirage indépendants, n est un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

   $a/$ X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$.

   $b/$ $p(X = 0) = \frac{1}{2^{2n}}$.

   $c/$ $p(X < 5) = 1 - p(X > 5)$.

2) Une maladie atteint 1% d'une population donnée.
   Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :
   - Chez les individus malades, 99% des tests sont positifs et 1% négatifs.
   - Chez les individus non malades, 98% des tests sont négatifs et 2% positifs.

   Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.

   On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».

   $a/$ $p(T/M) + p(T/\overline{M}) = p(T)$.

   $b/$ $p(T) = 0{,}0297$.

   $c/$ Sachant que le test est positif, il ya deux chances sur trois que l'individu testé ne soit pas malade.

3) La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}01$.
   $a/$ Pour tout réel $t \geq 0$, $p(Y \leq t) = 1 - e^{-0{,}01t}$.
   $b/$ La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est égale à $0{,}83$ à $0{,}01$ près.
   $c/$ La valeur de t pour laquelle $p(\,[0\,,t[\,) = p(\,[t\,,+\infty[\,)$ est 69 secondes à 1 seconde près.

Exercice n°2 : *(5,5 pts)*

On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{e^x}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{-x+4}{4x}\,e^x\,.$$

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

Le tableau de variations de g est donné ci-contre :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$

1) $a/$ Etablir le tableau de variations de f.
   $b/$ Etudier la position relative de C_f et C_g.
   $c/$ Justifier que C_g admet un point d'inflexion que l'on précisera.
   $d/$ Déterminer l'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.
   $e/$ Tracer C_f et C_g.

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y'-y=\dfrac{-e^x}{x^2}$. et on se propose de chercher l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,,+\infty[$.

   $a/$ Démontrer que la fonction f est solution de (E).

   $b/$ Démontrer qu'une fonction y définie sur $]0\,,+\infty[$ est solution de (E) si, et seulement si, $y-f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'-y=0$.

   $c/$ Résoudre l'équation (E'), en déduire l'ensemble des solutions de (E).

   $d/$ La fonction g est-elle solution de (E) ?

3) Pour tout $x\in\,]0\,,+\infty[$, on pose : $F(x)=\int_x^{x+1} f(x)\,dx$.

   $a/$ Soit G une primitive de la fonction f sur $]0\,,+\infty[$.

   En remarquant que : $F(x)=G(x+1)-G(x)$, étudier le sens de variations de F.

   $b/$ On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre C_f et l'axe des abscisses soit minimale

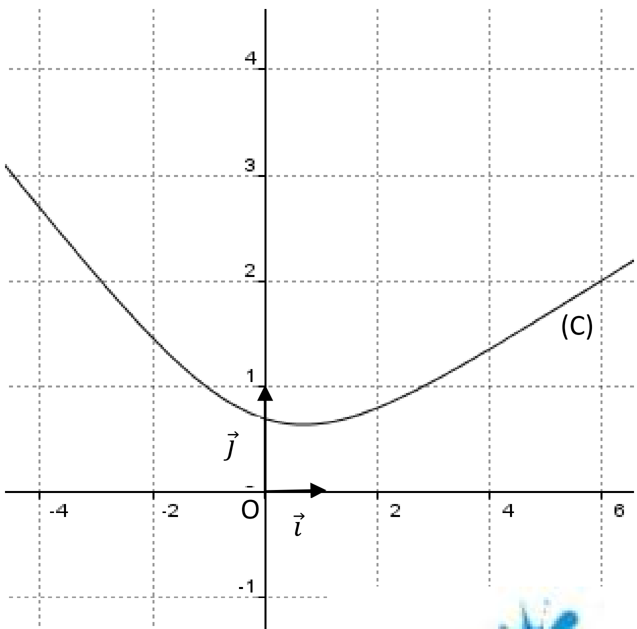
   Comment doit-on procéder ?

Exercice n°3 : *(6 pts)*

On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{3}x.$$

La courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal est donnée dans le graphique ci-contre.



1) $a/$ Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   $b/$ Montrer que la droite Δ: $y=\dfrac{1}{3}\,x$ est une asymptote à la courbe (C).

   $c/$ Etudier la position relative de (C) et Δ.

$d/$ Montrer que, pour tout $x \in IR$, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$

En déduire la limite de f en $-\infty$.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x \in IR$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}.$$

$b/$ Dresser le tableau de variation de f.

3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x})\,dx$.

$a/$ Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

$b/$ soit $t \in]0, +\infty[$, montrer que : $\frac{1}{1+t} < 1$, en déduire que : $\ln(1 + u) < u$, pour tout $u > 0$.

$c/$ En déduire que, pour tout $x \in IR$, $\ln(1 + e^{-x}) < e^{-x}$.

$d/$ Montrer alors que, pour tout $n \geq 1$, on a : $v_n < 1$.

$e/$ La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ? Justifier.

Exercice n°4 : *(4 pts)*

Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité q_i en milligrammes, présente dans le sang à un instant t_i (en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant:

t_i (heures)	0	2	4	6	8
q_i (mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3

1/ $a/$ Construire le nuage de points $M_i(t_i, q_i)$ correspondant à cette série.

$b/$ Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point.

$c/$ Calculer la covariance et le coefficient de corrélation de cette série.

$d/$ Déterminer une équation de la droite D d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés. (coéfficients arrondies au centième).

$e/$ En utilisant cet ajustement, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures? Qu'en pensez-vous de ce résultat?

2/ On pose: $y = \ln(q)$.

$a/$ Calculer le coefficient de corrélation de la série (t, y).

$b/$ On considère qu'une équation de la droite d'ajustement affine de y en t est :

$y = -0{,}15t + 2{,}30$.

Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue de cet ajustement est donnée par: $q = a.e^{bt}$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.

$c/$ En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures?